

## Спектр квазисвязанных состояний в графене в окрестности сверхкритической кулоновской примеси\*

А.И. Бреев<sup>1</sup>, Н.А. Чалый<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия*

Исследован спектр квазисвязанных состояний дираковских квазичастиц в графене в сверхкритическом режиме. Определение квазисвязанных состояний через производную спектральной функции самосопряженного дираковского парциального гамильтониана позволило учесть неоднозначность определения гамильтониана в окрестности одиночной кулоновской примеси. Показано, что квазисвязанные состояния отвечают точкам максимума производной спектральной функции и получена их связь с комплексными решениями спектрального уравнения, отвечающего сверхкритической кулоновской примеси.

**Ключевые слова:** графен, безмассовые носители заряда, атомный коллапс, квазисвязанные состояния, кулоновская примесь, сверхкритический режим, самосопряженные расширения.

### Введение

Нерелятивистская квантовая механика предсказывает [1–3], что, когда заряд сверхтяжелого атомного ядра превышает определенный порог, возникающее в результате сильное кулоновское поле вызывает необычное состояние атомного коллапса. Квазиклассическая интерпретация таких состояний состоит в том, что траектория электрона имеет форму спирали, закручивающуюся к ядру, тогда как в это же время из ядра вылетает позитрон по траектории той же формы. Коллапс имеет место там, где угловой момент электрона достаточно мал и благодаря этому все легкие ядра с зарядом  $Z < Z_c$ ,  $Z_c = 137$ , не подвержены этому эффекту.

Отметим, что носители заряда (квазичастицы) в графене в низкоэнергетическом приближении ведут себя как дираковские безмассовые фермионы [4]. Уравнение Дирака для графена, используемое для описания таких квазичастиц, отличается от обычного уравнения Дирака тем, что носители заряда обладают линейным законом дисперсии, а также наличием двух долин (точек Дирака) в зонной структуре. Помимо этого, квазичастицы в графене живут в двумерном пространстве, а роль «скорости света» играет скорость Ферми  $v_F$ .

В окрестности кулоновской примеси в графене также возникает эффект, аналогичный атомному коллапсу [5]. Несмотря на то, что безмассовые частицы не могут образовывать связанные состояния, в случае, когда безразмерная величина силы кулоновского потенциала  $g = Ze^2 / \epsilon \hbar v_F$  превышает некоторое критическое значение  $g_c$ , возникает бесконечное семейство квазисвязанных состояний. Такие состояния являются нестабильными и имеют короткое время жизни, а также, подобно связанным состояниям, имеют дискретный спектр. В случае  $g > g_c$  в окрестности кулоновской примеси возникают резонансы [4–6] и сама примесь называется сверхкритической. В графене критическое значение  $g$  может быть достигнуто уже для заряда примеси  $Z$  около единицы. С такими зарядами гораздо проще проводить эксперименты. Например, аналог эффекта атомного коллапса в графене был подтвержден экспериментально [7, 8]. Отметим, что оператор Дирака в окрестности кулоновской примеси неопределен однозначно и допускает семейство самосопряженных (с.с.) расширений.

В данной работе исследуются спектры квазисвязанных состояний на основе свойств производной спектральной функции, которая определяет спектр оператора Дирака [9, 10]. Показано, что квазисвязанные состояния отвечают точкам максимума производной спектральной функции и получена их связь с комплексными решениями спектрального уравнения, отвечающего сверхкритической кулоновской примеси.

\* Исследование выполнено при частичной поддержке гранта Правительства Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2025-009 от 28.02.2025 г.).

### 1. Модель Дирака для квазичастиц в графене в окрестности кулоновской примеси

Рассмотрим спектр возбуждений квазичастиц в графене в присутствии одной кулоновской примеси с зарядом  $Ze$ , которую поместим в середину шестиугольника решетки графена. Выберем декартову систему координат, в начале которой находится примесь. Введем макроскопическую диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ , которая учитывает эффект ослабления кулоновского поля поляризацией кристалла на расстояниях больше межатомных. Кулоновская примесь описывается потенциалом [9, 10]

$$V(\rho) = -\frac{Ze^2}{\epsilon\rho}, \quad \rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y)$  – вектор, лежащий в плоскости графена  $z = 0$ .

Обозначим через  $\mathbf{K}_s$  точки Дирака, координаты которых в зоне Бриллюэна выбраны в виде  $\mathbf{K}_s = s\left(\frac{4\pi}{3a}, 0\right)$ , где  $a = 2.46 \text{ \AA}$  – постоянная решетки графена;  $s = \pm 1$  – изоспиновое квантовое число.

В рамках модели Дирака квазичастицы в окрестности каждой точки Дирака  $\mathbf{K}_s$  описываются уравнением Дирака в следующей форме:

$$\check{H}_s \Psi_s = \frac{\mathcal{E}\Psi_s}{\hbar v_F} = E\Psi_s, \quad s = \pm 1, \quad (2)$$

где волновые функции  $\Psi_s$  являются дублетами  $\Psi_s = \Psi_s(\mathbf{r}) = \{\psi_{s\alpha}(\mathbf{r}), \alpha = 1, 2\}$ , компоненты  $\psi_{s\alpha}$  которых являются огибающими блоховских волн в двух подрешетках графена, а  $\check{H}$  – дифференциальные операции, отвечающие уравнению Дирака [9]:

$$\check{H}_s = \hbar v_F \left[ -i(s\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y) - \frac{\mathbf{g}}{\rho} \right], \quad (3)$$

где  $\mathbf{g} = \frac{Ze^2}{\epsilon \hbar v_F} = \alpha_F \epsilon^{-1} Z$ ,  $\alpha_F = e^2 / (\hbar v_F)$  – постоянная тонкой структуры;  $v_F \approx 10^6 \text{ см/с}$  – скорость Ферми;  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  – матрицы Паули. Решения уравнения (2) будем искать в виде [9, 10]

$$\Psi_{sj}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{ij\varphi} \begin{pmatrix} e^{-is\varphi/2} f(\rho) \\ -ise^{is\varphi/2} g(\rho) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где функции  $f(\rho)$  и  $g(\rho)$  называются радиальными функциями;  $j$  – это значения углового момента, которые являются собственными значениями оператора углового момента с собственными функциями (4).

В дальнейшем удобно представить набор радиальных функций в виде двумерного вектора-столбца  $(f(\rho), g(\rho))^T$  и ввести гильбертово пространство радиальных дублетов  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$ :

$$F(\rho) = \begin{pmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{pmatrix} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+) \quad (5)$$

со скалярным произведением

$$(F_1, F_2) = \int_0^{+\infty} \overline{F_1(\rho)} F_2(\rho) d\rho = \int_0^{+\infty} [\overline{f_1(\rho)} f_2(\rho) + \overline{g_1(\rho)} g_2(\rho)] d\rho, \quad (6)$$

такое, что  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+) = L^2(\mathbb{R}_+) \oplus L^2(\mathbb{R}_+)$  [6]. Тогда уравнение (2) приведет к виду

$$\check{h}(Z, j, s) F(\rho) = W F(\rho), \quad F(\rho) = \begin{pmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{pmatrix}, \quad W \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

$$\check{h}(Z, j, s) = -i\sigma_y \frac{d}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} \sigma_x - \frac{\mathbf{g}}{\rho}, \quad \kappa = sj,$$

где  $\check{h}(Z, j, s)$  принято называть парциальной радиальной дифференциальной операцией, а  $F(\rho)$  принадлежит пространству  $L^2(\mathbb{R}_+)$ .

Переменная  $j$  принимает полуцелые значения, как положительные, так и отрицательные,  $j = \pm(n + 1/2)$ , тогда как переменная  $Z$  – только неотрицательные целые значения. Рассмотрим переменную  $Z$  как непрерывную величину и будем возвращаться к ее целочисленным значениям в случае необходимости. Верхняя полуплоскость  $(j, Z)$  разбивается на несингулярную ( $g < g_s$ ) и сингулярную ( $g > g_s$ ) области, где  $g_s = \alpha_F \varepsilon^{-1} Z_s$ ,  $Z_s(j) = \alpha_F^{-1} \varepsilon \sqrt{j^2 - 1/4}$ . В свою очередь, сингулярную область можно поделить на три подмножества: субкритическую ( $g < g_c$ ), критическую ( $g = g_c$ ) и сверхкритическую ( $g > g_c$ ),  $g_c = \alpha_F \varepsilon^{-1} Z_c$  [9–11]. В каждой из этих четырех областей уравнение Дирака имеет разные решения и свойства, что было детально рассмотрено в [9, 10]. Поскольку оператор Дирака в окрестности кулоновской примеси неопределен однозначно, то для построения его с.с. расширений нужно построить с.с. парциальные радиальные гамильтонианы во всех четырех областях полуплоскости  $(j, Z)$ .

Рассмотрим сверхкритическую область. Оператор Дирака в сверхкритической области определяется через с.с. парциальный гамильтониан  $\hat{h}_\nu(Z, j, s)$ , который определяется следующим образом:

$$\hat{h}_\nu(Z, j, s) = \begin{cases} D_{h_\nu(Z, j, s)} = C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}_+), \\ \hat{h}_\nu(Z, j, s)F(\rho) = \check{h}(Z, j, s)F(\rho), \end{cases} \quad (8)$$

где  $\nu \in [-\pi/2, \pi/2]$  – параметр самосопряженного расширения;  $D_{h_\nu(Z, j, s)}$  – область определения парциального гамильтониана;  $\check{h}(Z, j, s)$  – соответствующая ему парциальная дифференциальная операция (7). Спектр гамильтониана  $\hat{h}_\nu(Z, j, s)$  является непрерывным и задается выражением  $\text{spes } \hat{h}_\nu(Z, j, s) = (-\infty, +\infty)$  [9].

Решение уравнений (7) для сверхкритической области имеет вид [9]

$$\begin{aligned} U_\nu(\rho, E) &= Q_\nu(E) [ie^{i\nu} F_1(\rho; W) - ie^{-i\nu} F_2(\rho; W)], \quad Q_\nu(E) = \sqrt{\sigma'_\nu(E)}, \\ F_1(\rho; W) &= X(\rho, Y, W), \quad F_2(\rho; W) = X(\rho, -Y, W), \quad Y = i\sigma, \\ X(\rho, Y, W) &= \frac{\rho^Y}{2} [\Phi_+(\rho, Y, W) + \Phi_-(\rho, Y, W)\Xi] d_+, \\ \Phi_-(\rho, Y, W) &= \frac{1}{iW} [e^{iW\rho} \Phi(\alpha, 1 + 2Y, -2iW\rho) - e^{-iW\rho} \Phi(\alpha_-, 1 + 2Y, 2iW\rho)], \\ \Phi_+(\rho, Y, W) &= e^{iW\rho} \Phi(\alpha, 1 + 2Y, -2iW\rho) + e^{-iW\rho} \Phi(\alpha_-, 1 + 2Y, 2iW\rho), \\ \Xi &= \begin{pmatrix} 0 & W \\ -W & 0 \end{pmatrix}, \quad d_\pm = \left( 1, \frac{\kappa \pm i\sigma}{g} \right)^T, \quad \sigma = \sqrt{g^2 - \kappa^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Phi(\alpha, \beta, z)$  – конфлюэнтная гипергеометрическая функция [11];  $\sigma'_\nu(E)$  – производная спектральной функции. Спектр оператора  $\hat{h}_\nu(Z, j, s)$  определяется носителем функции  $\sigma'_\nu(E)$  [11].

## 2. Спектральная функция в сверхкритической области

Рассмотрим производную спектральной функции  $\sigma'_v(E)$ . По определению [12]:

$$\sigma'_v(E) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega_v(E+i0)},$$

$$\omega_v(W) = -\frac{4i\sigma}{g} \frac{1 - \frac{g}{\Gamma(1-2i\sigma)} \Omega(W) e^{2iv}}{1 + \frac{g}{\Gamma(1-2i\sigma)} \Omega(W) e^{2iv}}, \quad (10)$$

$$\Omega(W) = \frac{-i\kappa}{i\sigma - ig} \frac{\Gamma(1+2i\sigma)\Gamma(-i\sigma - ig)}{\Gamma(i\sigma - ig)(\kappa - i\sigma)} (2e^{-i\pi/2}W)^{-2i\sigma}.$$

Точки  $E$ , в которых функция  $\omega_v(W)$  отлична от нуля, непрерывна и принимает комплексные значения, являются точками непрерывного спектра оператора  $\hat{h}_v(Z, j, s)$ .

В отличие от спектральных функций в других областях, которые являются монотонными, в сверхкритической области спектральная функция имеет экстремумы (рис. 1).

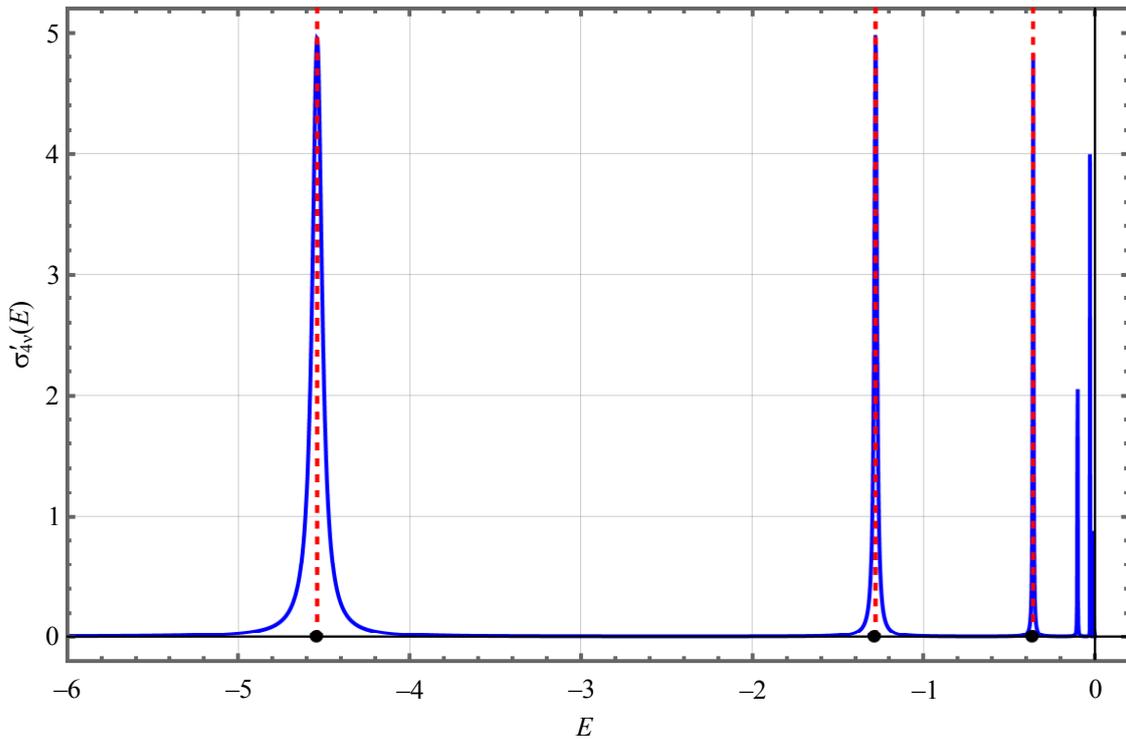


Рис. 1. Производная спектральной функции и точки ее максимумов.  
Выбраны следующие значения параметров:  $j = -3/2$ ,  $s = 1$ ,  $v = \pi/8$ ,  $g = 2.9$

Исследуем функцию  $\sigma'_v(E)$  на максимумы.  $\Omega(W)$  для вещественных значений энергии  $E$  можно привести к виду

$$\Omega(E) = \frac{\Gamma(1+2i\sigma)}{g} \frac{g + \sigma + i\kappa}{g - \sigma + i\kappa} \frac{\Gamma(-ig - i\sigma)}{\Gamma(-ig + i\sigma)} e^{-\delta\pi\sigma} e^{-2i\sigma \ln(2|E|)}, \quad \delta = \operatorname{sgn}(E). \quad (11)$$

Используя (11), представим производную спектральной функции (10) следующим образом:

$$\sigma'_v(E) = \frac{\delta}{4\sigma} \frac{g\mathcal{A}}{\pi\mathcal{A}_+ + \mathcal{B}_+(v;E) + \mathcal{B}_-(v;E)},$$

$$\mathcal{A}_\pm = \frac{g\pi}{4j\sigma} \left[ \sinh^{-1}(\pi\sigma) - \cosh^{-1}(\pi\sigma) \right] \left[ e^{2\pi\sigma} \sinh^{-1}(\pi(g - \delta\sigma)) \pm \sinh^{-1}(\pi(g + \delta\sigma)) \right], \quad (12)$$

$$\mathcal{B}_\pm(v;E) = 2^{\mp 2i\sigma} e^{\pm 2iv} |E|^{\mp 2i\sigma} (j \mp is\sigma) \Gamma(\pm i(g - \sigma)) \Gamma^2(\pm 2i\sigma) \Gamma(\mp i(g + \sigma)).$$

Поскольку величины  $\mathcal{B}_+(v;E)$  и  $\mathcal{B}_-(v;E)$  являются комплексно сопряженными друг к другу, то выражение  $\mathcal{B}_+(v;E) + \mathcal{B}_-(v;E)$  можно переписать в виде

$$\mathcal{B}_+(v;E) + \mathcal{B}_-(v;E) = 2\text{Re} \left[ (j + is\sigma) \Gamma(-i(g - \sigma)) \Gamma^2(-2i\sigma) \Gamma(i(g + \sigma)) e^{2i\sigma \ln(|2E| - 2iv)} \right]. \quad (13)$$

Максимумы функции  $\sigma'_{4v}(E)$  соответствуют минимумам ее знаменателя:

$$q(E) = \pi\mathcal{A}_+ + \mathcal{B}_+(v;E) + \mathcal{B}_-(v;E). \quad (14)$$

После прямых вычислений получаем выражение для точек максимума спектральной функции:

$$E_n(v) = E_n(0) \exp\left(\frac{v}{\sigma}\right), \quad E_n(0) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\pi n}{\sigma} + \frac{\tau}{2\sigma}\right) \cos(\phi),$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4\sigma} \ln\left(\frac{\sinh(\pi(g - \sigma))}{\sinh(\pi(g + \sigma))}\right), \quad (15)$$

$$\tau = \arg\left(\frac{\Gamma(1 + 2i\sigma) \Gamma(-ig - i\sigma) g + ijs + \sigma}{\Gamma(1 - 2i\sigma) \Gamma(-ig + \sigma) g + ijs - \sigma}\right).$$

Спектр квазистационарных состояний описывается выражением (14). При изменении параметра с.с. расширения  $v$  происходит сдвиг всего спектра. Поведение спектров (14) по виду напоминает выражение для квазиридберговских состояний, которые описывают падение частицы в центр поля в нерелятивистской квантовой механике [1, 5].

Покажем, что точки максимума спектральной функции можно связать с комплексными значениями энергии, при которых  $\sigma'(W) = \infty$ . Для этого представим комплексную энергию в виде  $W = E'e^{i\phi'}$ , где  $E' > 0$ , а  $E'$  и  $\phi'$  вещественны. Согласно (9), данные комплексные значения энергии определяются из уравнения

$$1 - \frac{ge^{2iv}}{\Gamma(1 - 2i\sigma)} \Omega(W) = 0. \quad (16)$$

Подставив  $\Omega(W)$  из (10) в (16), получим

$$1 - \frac{\Gamma(1 + 2i\sigma) \Gamma(-ig - i\sigma) g + ijs + \sigma}{\Gamma(-ig + \sigma) \Gamma(1 - 2i\sigma) g + ijs - \sigma} e^{2\sigma\phi} e^{-\pi\sigma} e^{-2i\sigma \ln(2E)} e^{2iv} = 0. \quad (17)$$

Для решения этого уравнения представим второе слагаемое в комплексном виде, т.е. рассмотрим уравнение вида  $1 - Ge^{i\theta} = 0$ . Исходя из вида этого уравнения, модуль  $G$  второго слагаемого должен быть равен 1, тогда как аргумент  $\theta$  должен быть равен 0. Исходя из этих условий, можно найти фазу  $\phi'$  и модуль  $E'$  искомой комплексной энергии  $W$ :

$$\phi' = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4\sigma} \ln\left(\frac{\sinh(\pi(g - \sigma))}{\sinh(\pi(g + \sigma))}\right), \quad (18)$$

$$E' = \frac{1}{2} \exp\left[\frac{1}{2\sigma}(-2\pi n + \tau)\right] \exp\left(\frac{v}{\sigma}\right).$$

Тогда итоговое выражение для комплексной энергии  $W$  принимает вид

$$W_n = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\pi n}{\sigma} + \frac{2\nu + \tau}{2\sigma} + i\phi\right), \quad (19)$$

а ее вещественная часть полностью совпадает с точками максимума спектральной функции (15).

### Заключение

Показано, что производная спектральной функции в сверхкритической области имеет максимумы, хотя нигде не обращается в бесконечность, отсюда следует отсутствие связанных состояний для безмассовых квазичастиц. Тем не менее максимумам производной спектральной функции отвечает квазисвязанный спектр электронных возбуждений. Найдено явное выражение квазисвязанного спектра электронных возбуждений (15) в сверхкритической области как точки максимума производной спектральной функции для произвольного параметра самоспряженного расширения. Показано, что изменение параметра с.с. расширения приводит к сдвигу квазисвязанного спектра (15). Показано, что полученные точки максимума производной спектральной функции также связаны с комплексными значениями энергии, при которых производная спектральной функции обращается в бесконечность [4]. Комплексные уровни энергии  $W_n$  (19) можно рассматривать как «размытые» уровни, ширина которых (определяемая мнимой частью энергии) связана с обратным временем жизни (скоростью распада)  $n$ -го квазисвязанного состояния.

Отметим, что в работе [6] также рассматривались самоспряженные дираковские гамильтонианы, отвечающие безмассовым носителям заряда в графене с кулоновским потенциалом в сочетании с полем Ааронова – Бома, и строились квазисвязанные состояния электронных возбуждений в сверхкритической области.

Полученные результаты можно использовать для экспериментальной проверки эффекта атомного коллапса в графене [7, 8], а также в исследовании процесса рождения электрон-позитронных пар из вакуума во внешнем сверхкритическом кулоновском поле [13] применительно к физике графена [14].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: учеб. пособие: Для вузов: В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – М.: Физматлит, 2004.
2. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1981.
3. Greiner W. Quantum Electrodynamics. – Berlin: Springer, 2009.
4. Shytov A.V., Katsnelson M.I., Levitov L.S. // Phys. Rev. Lett. – 2007. – V. 99. – No. 23. – P. 236801.
5. Shytov A.V., Katsnelson M.I., Levitov L.S. // Phys. Rev. Lett. – 2007. – V. 99. – No. 24. – P. 246802. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.246802.
6. Халилов В.Р. // ТМФ. – 2013. – Т. 175. – № 2. – С. 226–246.
7. Wang Y., Brar V., Shytov A., et al. // Science. – 2013. – V. 340. – P. 734–737. – DOI: 10.1126/science.123432.
8. Wang Y., Brar V., Shytov A., et al. // Nature Phys. – 2012. – V. 8. – P. 653–657. – DOI: 10.1038/nphys2379.
9. Бреев А.И., Гитман Д.М. // ЖЭТФ. – 2021. – Т. 159. – Вып. 6. – С. 1070–1089.
10. Бреев А.И., Феррейра Р., Гитман Д.М., Воронов Б.Л. // ЖЭТФ. – 2020. – Т. 157. – Вып. 5. – С. 847–876.
11. Gitman D.M., Tyutin I.V., Voronov B.L. Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics: General Theory and Applications to Schrodinger and Dirac Equations with Singular Potentials. – N.Y.: Birkauer, 2012.
12. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. – Nat. Bureau Stand, 1972.
13. Schwinger J.S. // Phys. Rev. – 1951. – V. 82. – P. 664–679. – DOI: 10.1103/PhysRev.82.664.
14. Schmitt A., Vallet P., Mele D., et al. // Nature Phys. – 2023. – V. 19. – P. 830–835. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.236801.

Поступила в редакцию 23.12.2024,  
принята в печать 07.03.2025.

**Бреев** Александр Игоревич, к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической физики НИ ТГУ, e-mail: breev@mail.tsu.ru;

**Чалый** Никита Андреевич, магистрант НИ ТГУ, ст. лаборант лаборатории анализа данных физики высоких энергий НИ ТГУ, e-mail: nchalyi@mail.tsu.ru.

## Spectrum of quasibound states in graphene in the vicinity of a supercritical Coulomb impurity

A.I. Breev<sup>1</sup>, N.A. Chalyi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russia

**Abstract:** The paper studies the spectrum of quasibound states of Dirac quasiparticles in graphene in the supercritical regime. The definition of quasibound states through the derivative of the spectral function of the self-adjoint Dirac partial Hamiltonian allowed us to take into account the ambiguity of the Hamiltonian definition in the vicinity of a single Coulomb impurity. It is shown that quasibound states correspond to the maximum points of the derivative of the spectral function and their relationship with complex solutions of the spectral equation corresponding to a supercritical Coulomb impurity is obtained.

**Keywords:** graphene, massless charge carriers, atomic collapse, quasi-bound states, Coulomb impurity, supercritical regime, self-adjoint extensions.

**Acknowledgments:** The research was carried out with the partial support of a grant from the Government of the Russian Federation (agreement No. 075-15-2025-009 of 28 February 2025).

**For citation:** Breev A.I., Chalyi N.A. (2025) Spectrum of quasibound states in graphene in the vicinity of a supercritical Coulomb impurity. *Izvestiya vuzov. Fizika*. 68(4). pp. 21–27. DOI: 10.17223/00213411/68/4/3

### REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1977). *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. Volume 3 (3rd edition.)*. Pergamon Press.
2. Akhiezer A.I., Berestetskii V.B. (1965). *Quantum Electrodynamics. (2nd edition.)*. Interscience Publishers.
3. Greiner W. (2009) *Quantum Electrodynamics*. Berlin: Springer.
4. Shytov A.V., Katsnelson M.I., Levitov L.S. (2007) *Physical Review Letters*. 99(23). p. 236801.
5. Shytov A.V., Katsnelson M.I., Levitov L.S. (2007) *Physical Review Letters*. 99(24). p. 246802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.246802
6. Khalilov V.R. (2013) *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*. 175(2). pp. 226–246. (In Russian.)
7. Wang Y., Brar V., Shytov A., et al. (2013) *Science*. 340. pp. 734–737. DOI: 10.1126/science.123432
8. Wang Y., Brar V., Shytov A., et al. (2012) *Nature Physics*. 8. pp. 653–657. DOI: 10.1038/nphys2379
9. Breev A.I., Gitman D.M. (2021) *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki*. 159(6). pp. 1070–1089. (In Russian.)
10. Breev A.I., Ferreyra R., Gitman D.M., Voronov B.L. (2020) *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki*. 157(5). pp. 847–876. (In Russian.)
11. Gitman D.M., Tyutin I.V., Voronov B.L. (2012) *Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics: General Theory and Applications to Schrodinger and Dirac Equations with Singular Potentials*. N.Y.: Birkhauser.
12. Abramovitz M., Stegun I.A. (1972) *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards.
13. Schwinger J.S. (1951) *Physical Review*. 82. pp. 664–679. DOI: 10.1103/PhysRev.82.664
14. Schmitt A., Vallet P., Mele D., et al. (2023) *Nature Physics*. 19. pp. 830–835. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.236801

The article was submitted 23.12.2024,  
accepted for publication 07.03.2025.

**Breev** Alexander I., Ph.D., Associate Professor of the Department of Theoretical Physics of TSU, e-mail: breev@mail.tsu.ru;

**Chalyi** Nikita A., Undergraduate, Assistant of the Laboratory of High Energy Physics Data Analysis of TSU, e-mail: nchalyi@mail.tsu.ru.